MODELAREA UNEI ACTIVITĂȚI MILITARE CU AJUTORUL TEORIEI AȘTEPTĂRII

THE MATHEMATICAL MODELING OF A MILITARY ACTION BY APPLYING THE EXPECTATION THEORY

Lect.univ.dr. Florentina-Loredana DRAGOMIR*

Modelarea matematică a acțiunilor militare implică situații din teoria așteptării, situații în care își găsesc o largă aplicare utilizând domeniul utilitar. Un rol important îl ocupă sistemele în care o componentă oarecare poate părăsi rândul sau sistemul, înainte de a fi satisfăcută.

The mathematical modeling of military actions involves situations of expectation theory, situations that find wide application. An important role is played by systems in which a requirement may leave the turn or system before it is satisfied.

Cuvinte-cheie: cercetare operațională; modelare matematică; teoria așteptării.
Keywords: *operational research; mathematical modeling; expectation theory.*

Elaborarea deciziei, privită ca un proces fundamental, reprezintă un act complex, care implică succesiunea unor metode moderne, capabile să supună unei atente analize criteriile de alegere a variantelor posibile de acţiune şi să aprecieze argumentat, din punct de vedere ştiinţific, efectele hotărârii propuse, inclusiv riscurile care decurg în urma soluţiei adoptate.

Introducerea metodelor moderne de analiză şi de fundamentare decizională, menite să ridice calitatea actului decizional şi de execuţie a acestuia, reprezintă o acţiune continuă şi, în acelaşi timp, o consecinţă firească a procesului de pregătire a specialiştilor militari în domeniu.

Fundamentarea ştiinţifică a deciziei impune calcule complexe, cu ajutorul modelelor şi al metodelor matematice, care ţin seama de factorii aleatori care pot apărea în desfăşurarea acţiunilor de luptă.

În cercetarea fenomenelor este necesară nu numai înţelegerea esenţei diferitelor elemente şi a interdependenţei lor, ci şi studierea relaţiilor cantitative dintre ele. Pentru aceasta, se utilizează metodele de cercetare date de matematică. Însă folosirea matematicii nu trebuie înţeleasă ca ceva abstract, rupt de realitatea obiectivă. În cazurile concrete, care se studiază, utilizând aparatul matematic, trebuie ţinut seama de conţinutul calitativ al fenomenului, întrucât acesta defineşte însăşi caracterul relaţiilor cantitative.

Teoria așteptării, parte a cercetării operaționale, își găsește o aplicabilitate tot mai largă în diferite domenii de activitate. În sistemele de așteptare, există mai multe surse de intrare, fiecare cu o distribuţie de probabilitate diferită. De exemplu, să presupunem că o unitate militară este deservită de trei depozite și că numărul mediu de mașini de aprovizionare, care sosesc pe minut, variază în funcție de depozitul care aprovizionează. În acest caz, sursele (depozitele) se înlocuiesc printr-o sursă unică, a cărei distribuţie de probabilitate se măsoară sau se calculează.

În viața de zi cu zi, distingem și sisteme cu mai multe fire (cozi), în care unităţile fie că se plasează din oficiu, în firul cel mai scurt, fie că se admit anumite priorităţi. Ansamblul relaţiilor de ordine sau al priorităţilor care intervin în firele de așteptare formează *disciplina de așteptare.* În exemplul unității militare, s-ar putea admite că există două fire de așteptare, dintre care unul rezervat anumitor depozite cu materiale specifice teatrelor de operații.

***Universitatea Națională de Apărare „Carol I”**
e-mail: *dragomir.florentina@myunap.net*

Aplicație

Folosind un exemplu concret de *m* maşini de luptă pentru infanterie (clienţi) şi *S* specialişti în reparaţii (staţii), cu ipoteza $S < m$, se poate defini fenomenul în modul următor: dacă *n* este numărul de specialişti, care efectuează reparaţiile şi $1 \le n \le S$, există $S - n$ specialişti reparaţii care sunt neocupaţi (corespunzător celor *n* specialişti care repară, vor fi *n* maşini de luptă pentru infanterie în reparaţie şi nicio maşină de luptă pentru infanterie nu aşteaptă reparaţia); pentru $S < n \le m$, există *S* maşini de luptă pentru infanterie în reparaţie şi $n - S$ în aşteptare.

Deoarece o valoare mică a factorului de întreținere, ψ, corespunde unor maşini de luptă pentru infanteria de bună calitate, se poate admite $\psi > 1$, fără pericol de aglomerare, iar dacă $\psi > S$, se poate ajunge la timpi de aşteptare.

Admițând ipotezele că fluxul de reparații este Poisson, repartiția este exponențială și regimul permanent, se pot scrie relațiile[1]:

$$0 \le n \le S,\ p_n = C_m^n \psi^n p_0, \text{ în care } C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

$$S \le n \le m,\ p_n = \frac{n!}{S! \cdot S^{n-S}} C_m^n \psi^n p_0, \text{ cu } \sum_{n=0}^{m} p_n = 1$$

Aceste formule, care pot părea a fi prea complicate, se pot înlocui cu următoarele formule de recurență.

Se va nota cu α_n raportul: $\alpha_n = \frac{p_n}{p_0}$.

Se calculează α_n de la $n = 0$ până la $n = S - 1$, cu ajutorul formulei:

$$\alpha_n = \frac{m-n+1}{n} \psi \alpha_{n-1} \text{ cu } \alpha_0 = 1 \qquad (1)$$

Se va continua de la $n = S$ la $n = m$, cu ajutorul formulei:

$$\alpha_n = \frac{m-n+1}{S} \alpha_{n-1}. \qquad (2)$$

Fie: $\psi = 0{,}1,\ m = 20,\ S = 3$

Utilizând formula (1) până la $n = 3$, se obţine:

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{20-0}{0+1} \cdot 0{,}1 \cdot 1 = \frac{20}{1} \cdot 0{,}1 = 2$$

$$\alpha_2 = \frac{20-1}{1+1} \cdot 0{,}1 \cdot 2 = 1{,}9$$

$$\alpha_3 = \frac{20-2}{2+1} \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}9 = 1{,}14$$

Folosim formula (2) de la $n = 4$ la $n = 20$:

$$\alpha_4 = \frac{20-3}{3} \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}14 = 0{,}646$$

$$\alpha_5 = \frac{20-4}{3} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}646 = 0{,}3445$$

$$\alpha_6 = \frac{20-5}{3} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3445 = 0{,}17227$$

$$\alpha_7 = \frac{20-6}{3} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}17227 = 0{,}08039$$

$$\alpha_8 = \frac{20-7}{3} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}08039 = 0{,}03483$$

$$\alpha_9 = \frac{20-8}{3} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}03483 = 0{,}01393$$

$\alpha_{10} = 0{,}00511,\quad \alpha_{11} = 0{,}00170$

$\alpha_{12} = 0{,}00051,\quad \alpha_{13} = 0{,}00013$

$\alpha_{14}, \alpha_{15}, \alpha_{16}, \dots, \alpha_{20}$ sunt mai mici decât 0,0001.

Plecând de la relația:

$$p_0 = 1 - \sum_{n=1}^{m} p_n, \qquad (4)$$

se poate scrie:

$$1 = \frac{1}{p_0} - \sum_{n=1}^{m} \frac{p_n}{p_0} = \frac{1}{p_0} - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n, \qquad (5)$$

de unde:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{m} \alpha_n}. \qquad (6)$$

Avem:

$$\sum_{n=1}^{m} \alpha_n = 2 + 1{,}9 + 1{,}14 + 0{,}646 + 0{,}3445 +$$
$$+0{,}17227 + 0{,}08039 + 0{,}03483 + 0{,}01393 +$$
$$+0{,}00511 + 0{,}00170 + 0{,}00051 + 0{,}00013 +$$
$$\dots = 6{,}3394$$

Deci:

$$p_0 = \frac{1}{1 + 6{,}3394} = 0{,}13625$$

De unde :

$$p_1 = \alpha_1 p_0 = 2 \cdot 0{,}13625 = 0{,}27250,$$

$$p_2 = \alpha_2 p_0 = 1{,}9 \cdot 0{,}13625 = 0{,}25888 \dots \quad \text{etc.}$$

În tabelul nr. 1, sunt trecute probabilităţile referitoare la diversele situaţii, fiind omise probabilitățile cu valori mai mici strict decât 0,00007, care corespund pentru n ≥ 13.

Tabelul nr. 1

Repartiția mașinilor

n	Mașini în reparație j	Mașini în așteptare v	Mecanici neocupați ρ	p_n
0	0	0	3	0,13625
1	1	0	2	0,27250
2	2	0	1	0,25888
3	3	0	0	0,15533
4	3	1	0	0,08802
5	3	2	0	0,04694
6	3	3	0	0,02347
7	3	4	0	0,01095
8	3	5	0	0,00475
9	3	6	0	0,00190
10	3	7	0	0,00070
11	3	8	0	0,00023
12	3	9	0	0,00007

Situaţia este apreciabil mai bună, în cazul a 20 de maşini şi trei mecanici specialişti, caz în care probabilitatea deservirii este de 0,25888. Se regăseşte aceeaşi concluzie şi în cazul unui număr de clienţi nelimitat (mașini de luptă), adică situaţia se îmbunătăţeşte mereu, iar la o medie totală de serviri se măreşte numărul de staţii.

Într-o problemă de întreţinere şi de reparaţie cu aşteptare aleatorie, se definesc doi coeficienţi:

$$k_1 = \frac{\bar{v}}{m} = \frac{\text{numărul mediu de mașini în așteptare (în fir)}}{\text{numărul total de mașini}} \qquad (7)$$

Coeficientul k_1 se numeşte *coeficient de indisponibilitate* pe maşină.

$$k_2 = \frac{\bar{\rho}}{S} = \frac{\text{numărul mediu de mecanici inactivi}}{\text{numărul de mecanici}} \qquad (8)$$

Coeficientul k_2 se numeşte *coeficient de inactivitate* pe mecanic.

Valorile $\bar{v}$, $\bar{\rho}$ şi $\bar{n}$ (numărul mediu de mecanici specialişti, implicați în repararea maşinilor de luptă) sunt date de formulele[2] :

$$\bar{v} = \sum_{n=S+1}^{m} (n-S) p_n \qquad (9)$$

$$\bar{\rho} = \sum_{n=0}^{m} (S-n) p_n \qquad (10)$$

$$\bar{n} = S + \bar{v} - \bar{\rho} = S + \underbrace{\sum_{n=S+1}^{m} (n-S) p_n}_{\bar{v}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{S} (S-n) p_n}_{\bar{\rho}} \qquad (11)$$

În exemplul anterior, cu $S = 3$, $m = 20$.

$$\bar{v} = \sum_{n=4}^{20} (n-3) p_n = p_4 + 2p_5 + 3p_6 + \dots + 17p_{20} = 0{,}339$$

$$\bar{\rho} = \sum_{n=0}^{3} (3-n) p_n = 3p_0 + 2p_1 + p_2 = 1{,}213$$

Se deduce de aici:

$$\bar{n} = 3 + 0{,}339 - 1{,}213 = 2{,}126$$

apoi:

$$k_1 = \frac{0{,}339}{20} = 0{,}0169$$

$$k_2 = \frac{1{,}213}{3} = 0{,}404$$

Considerăm situația în care *S* = *1*, *m* = *6*, iar ψ are aceeași valoare ψ = *0,1*.

Astfel, $\bar{v} = 0{,}324$. Rezultă:

$$\bar{\rho} = \sum_{n=0}^{1} (1-n) p_n = p_0 = 0{,}484$$

$$\bar{n} = 1 + \bar{v} - \bar{\rho} = 1 + 0{,}324 - 0{,}484 = 0{,}840$$

$$k_1 = \frac{0{,}324}{6} = 0{,}0540$$

$$k_2 = \frac{0{,}484}{1} = 0{,}484$$

Din examinarea rezultatelor anterioare, se observă avantajul situației (*S* = *3*, *m* = *20*, ψ = *0,1*) în care coeficientul de indisponibilitate pe mașină, k_1, respectiv coeficientul de inactivitate pe mecanic k_2 sunt mai mici, în comparație cu situația (*S* = 1, *m* = 6, ψ = *0,1*).

Probabilitatea unei așteptări este dată de:

$$p = \sum_{n=S}^{m} p_n$$

În exemplul dat (S=3, m=20, $\psi = 0{,}1$):

$$p = \sum_{n=3}^{20} p_n = 1 - \sum_{n=0}^{2} p_n = 1 - (0{,}13625 +$$

$$+0{,}27250 + 0{,}25888) =$$

$$= 1 - 0{,}66763 = 0{,}332737$$

Timpul mediu de așteptare în fir, $\overline{t_f}$ este:

$$\overline{t_f} = \frac{\bar{\nu}}{\lambda(m - \bar{n})} = \frac{1}{\lambda(m - \bar{n})} \sum_{n=S+1}^{m} (n - S) p_n$$

Presupunând că durata medie a reparației pe mașină este de 5 ore, $\mu = \frac{1}{5}$, $\psi = \frac{\lambda}{\mu}$, rezultă:

$$S = 3, m = 20,$$

$$\overline{t_f} = \frac{0{,}339}{17{,}874 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{1}{5}} = 0{,}948 \text{ ore}$$

sau aproximativ 57 de minute.

Pentru cazul S = 1, m = 6, $\psi = 0{,}1$ rezultă:

$$\overline{t_f} = \frac{0{,}324}{5{,}16 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{1}{5}} = 3{,}14 \text{ ore}$$

sau aproximativ 188 de minute.

Concluzii

Din studiul sistemelor de așteptare, se poate crea o imagine asupra diversității structurii acestora. De pildă, când există mai multe fire (rânduri), sau accesul la canalul de servire se face în funcție de unele reguli de prioritate, criteriul, care arată calitatea sistemului de așteptare, este dat de probabilitatea de servire a unui număr cât mai mare de cerințe intrate în sistem. Analiza efectuată prezintă o modalitate de calcul, prin care se rezolvă problema reparației unor mașini de luptă, dar mai ales, conferă un punct de vedere asupra soluționării unor situații reale. Instrumentul matematic prezentat conduce la îmbunătăţirea randamentului sistemelor de aşteptare şi, implicit, la rezolvarea problemelor existente în practică.

Exemplul prezentat în acest articol ajută la organizarea fundamentată a acțiunilor militare, ţinând seama de existenţa şi de influenţa factorilor perturbatori. Experienţa în organizare şi în planificare a statului major poate să fie asociată cu un riguros aparat de calcul, în scopul asigurării unei forme organizatorice cât mai potrivite a misiunilor de îndeplinit. Mijloacele care asigură servirea unei cerinţe include şi rezolvarea ştiinţifică a problemelor, lărgind orizontul specialiştilor militari. Astfel, procedeele de analiză şi de calcul din dotarea comandamentelor scot în relief dependenţele dintre factorii care definesc desfăşurarea evenimentelor şi deservesc stabilirea momentelor deciziei, respectiv consecinţele acesteia.

NOTE:

1 C. Alexandrescu, D. Ilina, C. Mincu, *Bazele matematice ale organizării sistemelor de transmisiuni*, Editura Militară, Bucureşti, 1994, pp. 56-87.

2 Gh. Vrănceanu, Şt. Mititelu, *Probleme de cercetare operaţională*, cap.4, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978, pp. 124-198.

BIBLIOGRAFIE

Alexandrescu C., Ilina D., Mincu C., *Bazele matematice ale organizării sistemelor de transmisiuni*, Editura Militară, Bucureşti, 1994.

Bryde Daniel, Broquetas Michael, Volm M. John, „The project benefits of Building Information Modelling (BIM)”, *International Journal of Project Management*, 2013.

Deng Fang, Zhu Lin, Chen Jie, *Application of cellular automata in military complex system*, „31st Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (YAC)”, Wuhan, 2016.

Georgoudas G. Ioakeim, Sirakoulis C. Georgios, Andreadis I. Th, „Modelling earthquake activity features using cellular automata”, *Math. Comput. Model*, vol. 46, 2007.

Ilie Gheorghe, Stoian Ion, Alexandrescu Gelu, *Modelarea sistemelor şi proceselor*, Editura Universităţii Naţionale de Apărare „Carol I”, Bucureşti, 2005.

Stoian Ion, *Elemente de programare liniară – aplicaţii în domeniul militar*, Editura Academiei Înalte Studii Militare, Bucureşti, 2002.

Vrănceanu Gh., Mititelu Şt., *Probleme de cercetare operaţională*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.