APLICAŢII ALE PROGRAMĂRII LINIARE

APPLICATIONS OF LINEAR PROGRAMMING

Lect. univ.dr. Florentina-Loredana DRAGOMIR*
Col. (r) prof.univ.dr. Gelu ALEXANDRESCU**

Oricare ar fi domeniul de aplicare, programarea liniară constă în elaborarea şi în rezolvarea unor modele matematice, care exprimă atât aspectul cantitativ, cât şi cel calitativ al problemei. Trebuie menţionat faptul că modelul matematic nu se referă strict la aspectul matematic al problemei, ci mai ales la conţinutul acesteia.

Whatever the scope, linear programming consists in developing and solving mathematical models that express both the quantitative and the qualitative aspect of the problem. It should be noted that the mathematical model does not refer strictly to the mathematical aspect of the problem, but rather its content.

Cuvinte-cheie: programare liniară; funcţie scop; soluţie optimă.
Keywords*: linear programming; goal function; optimal solution.*

Programarea liniară este o metodă de rezolvare a unor probleme care se exprimă matematic prin modele liniare. În aplicaţiile militare, programarea liniară poate fi aplicată în diverse domenii specifice acţiunilor militare în care *funcţia scop* poate să reflecte, în anumite condiţii, obiectivul urmărit.

În practica ducerii acţiunilor militare apare frecvent necesitatea repartizării unor forţe sau materiale (din anumite depozite) pe anumite obiective. De exemplu, cu ajutorul programării liniare se poate fundamenta decizia privind transportul unor resurse materiale din depozite la beneficiari astfel încât, pe ansamblu, costul total să fie minim.

În cadrul analizei problemelor de transport, trebuie să se aibă în vedere trei elemente esenţiale, şi anume:

- *funcţia scop*, prin care se exprimă matematic scopul urmărit prin rezolvarea (soluţionarea) problemei;
- *restricţiile*, prin care se reprezintă totalitatea condiţiilor care se impun în rezolvarea problemei, sub forma unor ecuaţii sau inecuaţii liniare;
- *condiţia de nenegativitate*, prin care se arată că atât datele iniţiale, cât şi rezultatele parţiale şi finale care se deţin trebuie să fie nenegative (≥ 0).

Modelul matematic al unei probleme de transport, în cazul existenţei a m depozite (centre) A_i, $i=\overline{1,m}$, în care se află cantităţile a_i, $i=\overline{1,m}$ şi n beneficiari B_j, $j=\overline{1,n}$, fiecare având nevoie de cantităţile b_j, $j=\overline{1,n}$, implică determinarea *minimului* unei funcţii liniare (*funcţia scop*), de forma[1]:

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

pe mulţimea soluţiilor nenegative ale sistemului:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\quad i=1,2,\dots m$$
$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_i,\quad j=1,2,\dots n \qquad (2)$$

$x_{ij}\geq 0$, i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n

în care: $a_i>0$; $b_j>0$; $c_{ij}\geq 0$; $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$.

Valorile x_{ij}, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$ reprezintă cantităţile care trebuie transportate de la depozitele A_i, $i=\overline{1,m}$ la beneficiarii B_j, $j=\overline{1,n}$, iar c_{ij}, $i=\overline{1,m}$,

***Universitatea Naţională de Apărare „Carol I”**
e-mail: *dragomir.florentina@myunap.net*
****Universitatea Naţională de Apărare „Carol I”**
e-mail: *alexandrescugelu@yahoo.com*

$j=1,n$ coeficienţii criteriului de eficacitate (km, cost, timp etc.) dintre depozitele A_i, $i=\overline{1,m}$ şi beneficiarii B_j, $j=\overline{1,n}$.

Orice problemă de transport cu $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ se poate aduce la cazul în care există egalitate între existent şi necesar.

Deoarece $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, sistemul de ecuaţii (2) are un număr de $m+n$ ecuaţii liniare cu $m \cdot n$ necunoscute, din care numai $m+n-1$ sunt ecuaţii liniare independente.

Rezolvarea sistemului (2) pe cale algebrică este o operaţie laborioasă, astfel că se vor utiliza unele metode care să conducă mai rapid la găsirea unei variante optime.

Soluţionarea problemelor de transport se poate realiza prin obţinerea unei *soluţii iniţiale de bază* şi prin *optimizarea soluţiei iniţiale de bază*, utilizând metode ale programării liniare de optimizare.

Soluţia iniţială de bază nu conduce, de regulă, la soluţia optimă. Soluţia constă în stabilirea unui sistem de valori x_{ij}, distribuite pe cele m linii şi n coloane, astfel încât suma lor pe linii să fie egală cu valorile scrise în ultima coloană a_i, iar suma lor pe coloană să corespundă cu valorile scrise în ultima linie b_j. Deoarece sunt $m+n-1$ ecuaţii liniar independente, vor rezulta $m+n-1$ restricţii.

Orice soluţie a problemei care conţine cel mult $m+n-1$ valori $x_{ij} > 0$, celelalte fiind nule este o *soluţie de bază*. Soluţia de bază este *nedegenerată*, dacă conţine *exact* $m+n-1$ valori strict pozitive $x_{ij} > 0$), şi *degenerată*, în caz contrar, când numărul valorilor $x_{ij} > 0$ este strict mai mic decât numărul restricţiilor (în acest caz, sunt $m+n-1$ restricţii).

Una dintre metodele care conduce la o soluţie iniţială de bază este *metoda elementului minim pe linie.* Această metodă ţine seama, în determinarea soluţiei iniţiale, de criteriul economic (costul, distanţele minime) sau de cel operativ (timpul minim).

Principiul este următorul: în tabelul cu datele iniţiale, se alege, în fiecare linie, elementul cel mai mic, în celula corespunzătoare repartizându-se cantitatea cea mai mică dintre cantităţile disponibile la depozite şi acelea necesare beneficiarilor, adică $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$, până la epuizarea cantităţilor disponibile.

Soluţiile iniţiale de bază trebuie verificate şi optimizate. Una dintre metodele care poate fi folosită în determinarea *soluţiei optime* este metoda distributivă[2].

Astfel, după obţinerea unei soluţii iniţiale de bază, se constată că beneficiarii B_j, $j=\overline{1,n}$ primesc întreaga cantitate de care au nevoie, iar din depozitele A_i, $i=\overline{1,m}$ se expediază toate cantităţile disponibile.

A verifica dacă o soluţie este *optimă* presupune a arăta că oricare altă soluţie conduce la o valoare mai mare sau egală cu a funcţiei obiectiv calculate pentru soluţia iniţială.

Vom denumi celulele din matrice, în care apar cantităţi $x_{ij} > 0$, celule *ocupate*, iar celelalte celule, în care $x_{ij} = 0$, celule *libere*.

Pentru verificarea soluţiei, prin *metoda distributivă*, se modifică soluţia găsită, prin includerea unor itinerare nefolosite în soluţia anterioară (includerea în noua soluţie a celulelor libere). Dacă valoarea funcţiei obiectiv nu se modifică sau este mai mare decât cea obţinută cu soluţia anterioară, soluţia anterioară este optimă. Dacă valoarea funcţiei obiectiv se micşorează faţă de soluţia anterioară, noua soluţie este mai bună decât soluţia anterioară.

Procedeul se aplică pentru toate celulele libere ($x_{ij} = 0$), formându-se un drum închis. Se porneşte întotdeauna din celula care corespunde unei celule libere, căreia i se atribuie o valoare α, şi se deplasează, pe orizontală sau pe verticală, până se ajunge în colţurile în care $x_{ij} \neq 0$, unde se vor modifica acele cantităţi x_{ij}, astfel încât totalul cantităţilor transportate să nu se modifice nici pe linie, nici pe coloană (se vor atribui colţurilor drumului valorile $x_{ij} - \alpha$ sau $x_{ij} + \alpha$). Sensul parcurs, pentru a forma un drum închis, poate fi direct sau indirect, în ordinea linie-coloană sau coloană-linie, până se ajunge în celula de pornire. De la fiecare celulă ocupată la care se ajunge, deplasarea are loc numai în unghi drept. Dacă soluţia de la care se pleacă este o soluţie de bază *nedegenerată*, iar deplasarea este executată corect, pentru fiecare celulă liberă se poate merge pe un *singur* drum. Un astfel de drum se numeşte *ciclu*.

În calculul evaluărilor s_{ij}, primul coeficient c_{ij} (cost, timp, km etc.), situat în celula de pornire

$x_{ij} = 0$, se va lua cu semnul „+”, apoi semnele alternează când se trece de la un colţ la altul al ciclului. Fiecare ciclu are un număr *par* de colţuri. Dacă se ţine seama de condiţia de nenegativitate a necunoscutelor x_{ij} ($x_{ij} \geq 0$), se constată că valoarea maximă a lui α este egală cu valoarea maximă a valorilor x_{ij}, situate în colţurile *pare* ale drumului închis (ciclului).

Se analizează variantele obţinute şi se determină soluţia optimă.

Metoda distributivă se aplică după acelaşi algoritm, indiferent de procedeul de determinare a soluţiei iniţiale de bază.

Etapele de aplicare a metodei distributive sunt:

- obţinerea unei soluţii iniţiale de bază;
- verificarea soluţiei iniţiale de bază obţinute, dacă este nedegenerată (dacă numărul de valori $x_{ij} > 0$ este egal cu m+n–1). În cazul în care soluţia iniţială este nedegenerată, se poate trece direct la aplicarea metodei distributive. În caz contrar, este necesară înlăturarea degenerării. Degenerarea se înlătură, prin a considera una dintre celulele libere ale matricei ca fiind ocupată, repartizând valoarea $x_{ij} = 0$, care se va numi „zero esenţial”. Degenerarea în problemele de transport apare atunci când suma unora din cantităţile a_i, disponibile în sursele A_i, este egală cu suma unora dintre cantităţile b_j, necesare beneficiarilor B_j;
- calculul *funcţiei scop* pentru soluţia iniţială de bază obţinută;
- efectuarea diferenţelor s_{ij} pentru toate celulele libere (în care $x_{ij} = 0$) şi formarea ciclurilor posibile pentru acestea;
- dacă toate diferenţele s_{ij} obţinute nu sunt negative ($s_{ij} \geq 0$), soluţia iniţială de bază este optimă. În caz contrar, soluţia nu este optimă, aceasta trebuie să fie îmbunătăţită, aplicând în continuare metoda distributivă. Ciclul se va forma pentru diferenţa negativă ($s_{ij} < 0$) cea mai mare în valoare absolută, pornind din celula corespunzătoare diferenţei considerate, făcând paşi în unghi drept din celulă ocupată (în care $x_{ij} > 0$) în celulă ocupată, atât pe linie, cât şi pe coloană, până se va închide ciclul (se ajunge în celula liberă din care s-a pornit). În celula liberă, care a dat diferenţa negativă cea mai mare în valoare absolută, se aduce cantitatea x_{ij} minimă din colţurile pare ale ciclului, adăugându-se şi scăzându-se, după caz, din celelalte valori x_{ij}, aflate pe linia, respectiv coloana ciclului;
- recalcularea *funcţiei scop* pentru soluţia îmbunătăţită sau finală, astfel: din funcţia scop iniţială (anterioară), se scade cantitatea x_{ij}, adusă în cadrul formării ciclului înmulţită cu valoarea diferenţei $s_{ij} < 0$, pentru care s-a format ciclul;
- verificarea soluţiei şi, eventual, reluarea algoritmului, dacă soluţia nu este optimă.

Algoritmul metodei distributive încetează atunci când toate diferenţele s_{ij} devin nule sau pozitive, caz în care soluţia obţinută este soluţia *optimă*.

Exemplu de calcul

Pentru completarea stocului trupelor, cinci unităţi notate B_j, $j=\overline{1,5}$ se vor aproviziona cu muniţie de la trei depozite de teritoriu, notate cu A_j, $i=\overline{1,3}$. Existentul în surse (în tone), notat cu a_j, $i=\overline{1,3}$, necesarul unităţilor (în tone), notat cu b_j, $j=\overline{1,5}$ şi distanţele c_{ij}, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,5}$ în kilometri de la surse la unităţi, se dau în *tabelul 1*.

Tabelul 1

A_I \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50	30	40	50	20	**90**
A_2	30	50	40	20	60	**40**
A_3	10	30	20	60	40	**80**
b_j	**30**	**50**	**40**	**60**	**30**	**210**

Se cere să se repartizeze unităţilor B_j, $j=\overline{1,5}$ cantităţile b_j, $j=\overline{1,5}$ de la sursele A_i, $i=\overline{1,3}$ cu existentul a_j, $i=\overline{1,3}$, astfel încât activitatea totală de transport, măsurată în *tone kilometri*, să fie *minimă*.

Prin aplicarea *metodei elementului minim pe linie*, se obţin rezultatele prezentate în *tabelul 2*.

Valoarea *funcţiei scop* este:

$f = 50 \cdot 30+10 \cdot 40+30 \cdot 20+40 \cdot 20+30 \cdot 10+30 \cdot 20+$
$+20 \cdot 60 = 5400\ t \cdot km$

Tabelul 2

A_I \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50	**50**/30	**10**/40	50	**30**/20	**90**
A_2	30	50	40	**40**/20	60	**40**
A_3	**30**/10	30	**30**/20	**20**/60	40	**80**
b_j	**30**	**50**	**40**	**60**	**30**	**210**

Soluţia de repartiţie este o soluţie de bază nedegenerată, deoarece s-au obţinut m+n–1 = 7 valori $x_{ij} > 0$.

În continuare, se va aplica metoda distributivă atât pentru verificarea, cât şi pentru optimizarea soluţiei de bază, obţinută prin metoda elementului minim pe linie. A verifica dacă această soluţie este optimă înseamnă a arăta că oricare altă soluţie conduce la o valoare mai mare sau egală cu a funcţiei obiectiv *f*, prezentată în relaţia (3).

Se va presupune pe rând că cele opt elemente x_{ij}, care au valoarea zero, devin diferite de zero (li se vor atribui valoarea $\alpha > 0$). Se va alege, de exemplu, necunoscuta x_{11}, care are valoarea zero, şi i se va atribui valoarea $\alpha > 0$. Aceasta înseamnă că se va trimite din sursa A_1 în unitatea B_1 cantitatea α. Pentru ca totalul cantităţilor transportate să nu se modifice, nici pe linii, nici pe coloane, va trebui să se ia $x_{13} = 10 - \alpha$, $x_{33} = 30 + \alpha$, $x_{31} = 30 - \alpha$. În acest mod, sumele x_{ij} pe linii şi pe coloane au rămas neschimbate. Pentru a şti dacă cheltuielile de transport, în urma acestei modificări, au fost sau nu reduse, se va calcula diferenţa dintre cheltuielile iniţiale şi cele rezultate în urma modificării, pentru ciclul marcat prin linii, din *tabelul 3* (în cazul considerat, pentru celula liberă $x_{11} = 0$).

Tabelul 3

A_I \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	α	50	$10-\alpha$		30	90
A_2				40		40
A_3	$30-\alpha$		$30+\alpha$	20		80
b_j	30	50	40	60	30	210

Dacă se notează cu s_{11} această diferenţă, rezultă:

$s_{21} = c_{11} - c_{13} + c_{33} - c_{31} = 50 – 40 + 20 – 10 = 20$

unde c_{ij} sunt coeficienţii corespunzători din *tabelul 1* (datele din problemă).

În mod analog, se vor analiza toate drumurile închise, generate de celulele libere şi se vor calcula diferenţele s_{ij} corespunzătoare.

s_{14} = 50-40+20-60 = *-30 (diferenţă negativă)*
s_{21} = 30-10+60-20 = 60
s_{22} = 50-30+40-20+60-20 = 80
s_{23} = 40-20+60-20 = 60
s_{25} = 60-20+40-20+60-20 = 100
s_{32} = 30-30+40-20 = 20
s_{35} = 40-20+40-20 = 40

Deoarece există diferenţe negative $s_{ij} < 0$ (în cazul analizat, $s_{14} = -30 < 0$), înseamnă că soluţia, obţinută prin aplicarea metodei elementului minim pe linie, nu este optimă; valoarea funcţiei obiectiv *f* poate fi redusă cu valoarea $s_{14} \cdot \alpha = 30 \cdot \alpha$ (α fiind valoarea necunoscutei x_{14} care a rezultat, după aplicarea metodei distributive).

Valoarea maximă pe care o poate lua α este egală cu valoarea minimă a valorilor x_{ij} situate în colţurile pare ale ciclului (*tabelul 4*).

$x_{14} = \max \alpha = \min \{x_{13}, x_{34}\} = \min \{10, 20\} = 10$

Tabelul 4

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1		50	$10-\alpha$	α	30	90
A_2				40		40
A_3	30		$30+\alpha$	$20-\alpha$		80
b_j	30	50	40	60	30	210

Se va înlocui valoarea necunoscutei x_{14} determinată ($x_{14} = 10$) şi va rezulta $x_{34} = 10$, $x_{13} = 0$, $x_{33} = 40$.

Repartiţia obţinută este prezentată (cu caractere boldite) în *tabelul 5*.

Tabelul 5

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50	**50**/30	40	**10**/50	**30**/20	90
A_2	30	50	40	**40**/20	60	40
A_3	**30**/10	30	**40**/20	**10**/60	40	80
b_j	30	50	40	60	30	210

În *tabelul 5*, s-a obţinut o nouă soluţie de repartiţie nedegenerată, având *funcţia scop* recalculată, astfel:

$f = 5400 + s_{14} \cdot x_{14} = 5400 - 30 \cdot 10 = 5100$ t·km

Deci soluţia este mai bună (5100 < 5400).

În continuare, se verifică dacă soluţia (*tabelul 5*) este optimă. Pentru aceasta, se vor forma din nou diferenţele s_{ij} pentru celulele libere.

s_{11} = 50-50+60-10 =50
s_{13} = 40-50+60-20 =30
s_{21} = 30-10+60-20 =60
s_{22} = 50-30+50-20 =50
s_{23} = 40-20+60-20 =60
s_{25} = 60-20+50-20 =70
s_{32} = 30-60+50-30 = - *10 (diferenţă negativă)*
s_{35} = 40-20+50-60 =10

Soluţia de repartiţie din *tabelul 5* nu este optimă, deoarece s-a obţinut diferenţa negativă s_{32} = -10. În celula corespunzătoare acestei diferenţe negative, se va forma ciclul, în *tabelul 6*, unde se va aduce cantitatea care corespunde minimului dintre valorile x_{ij} ale colţurilor pare din ciclu:

$x_{32} = \max \alpha = \min \{x_{12}, x_{34}\} = \min \{50, 10\} = 10$

Tabelul 6

Funcţia scop pentru repartiţia din *tabelul 6* este:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1		50-α		10+α	30	90
A_2				40		40
A_3	30	α	40	10-α		80
b_j	30	50	40	60	30	210

$f = 511 + s_{32} \cdot x_{32}$ = 5100-10·10 = 5000 t·km, mai bună decât precedenta (5000 < 5100).

Noua soluţie de repartiţie este dată în *tabelul 7*.

Tabelul 7

Soluţia este nedegenerată, iar funcţia scop are valoarea f = 5000 t·km.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50	**50/30**	40	**10/50**	**30/20**	90
A_2	30	50	40	**40/20**	60	40
A_3	**30/10**	30	**40/20**	**10/60**	40	80
b_j	30	50	40	60	30	210

Se verifică, din nou, dacă soluţia din *tabelul 7* este optimă.

s_{11} = 50–30+30–10 = 40
s_{13} = 40–30+30–20 = 20
s_{21} = 30–10+30–30+50–20 = 50
s_{22} = 50–20+50–30 = 50
s_{23} = 40–20+50-30+30–20 = 50
s_{25} = 60–20+50–20 = 70
s_{34} = 60–50+30–30 = 10
s_{35} = 40–20+30–30 = 20

Deoarece toate diferenţele s_{ij} sunt pozitive, soluţia de repartiţie, din *tabelul 7*, este finală şi optimă. Rezultă *funcţia scop* optimă (minimă), cu valoarea:

f_{min} = 5.000 t·km

Rezultatul final se interpretează astfel: unitatea B_1 va primi 30 t din sursa A_3; unitatea B_2 va primi 40 t din sursa A_1 şi 10 t din sursa A_3; unitatea B_3 va primi întreaga cantitate de 40 t din sursa A_3; unitatea B_4 va primi 20 t din sursa A_1 şi 40 t din sursa A_2; unitatea B_5 va primi întreaga cantitate de 30 t din sursa A_1.

În exemplul analizat, valorile lui s_{ij}, pentru soluţia din ultima iteraţie, sunt pozitive, deci soluţia determinată nu se mai poate îmbunătăţi. În unele cazuri, pe lângă valorile s_{ij} pozitive, pot să apară diferenţe s_{ij} = 0. Soluţia obţinută este şi, în acest caz, optimă, dar prezenţa diferenţelor egale cu zero indică posibilitatea obţinerii mai multor soluţii optime. Prezenţa diferenţelor s_{ij} = 0 arată că, efectuând modificarea corespunzătoare acestei diferenţe (formând ciclul corespunzător), valoarea funcţiei obiectiv f (relaţia 3) nu se schimbă.

Dacă se obţin două sau mai multe soluţii optime, combinarea lor poate duce la o serie întreagă de soluţii optime. Combinarea soluţiilor optime se poate face efectuând mediile aritmetice simple sau ponderate cu o valoare $k > 0$ ale cantităţilor din aceleaşi celule.

În cazul în care se urmăreşte să se afle maximul funcţiei obiectiv f, prin metoda distributivă, valorile lui s_{ij} vor fi pozitive, iar soluţia optimă se obţine în momentul când toate aceste valori sunt negative. Pentru aplicarea metodei, în acest caz, se va lua în considerare, dintre diferenţele s_{ij} pozitive, valoarea pozitivă cea mai mare a lui s_{ij}.

Utilizarea tehnicii de calcul în determinarea soluţiei optime

Programul Excel, prin componenta *Solver,* determină, în timp real, soluţia optimă. În *figura 1* se prezintă cele trei depozite (A1, A2, A3) şi cele cinci unităţi (B1, B2, B3, B4, B5), coeficienţii c_{ij}, cantităţile din depozite şi necesarul pentru fiecare unitate fiind aceleaşi ca în *tabelul 1*.

Utilizarea *componentei Solver* conduce la soluţia optimă, prezentată în *figura 1*, care este identică cu soluţia optimă, determinată cu ajutorul metodei distributive.

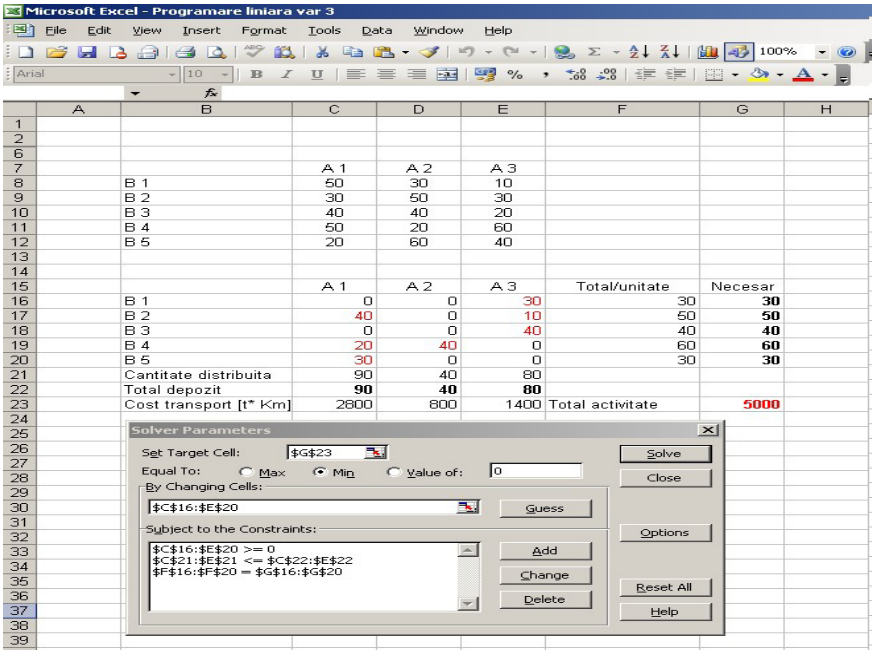

Fig. 1 *Determinarea soluţiei optime cu ajutorul tehnicii de calcul*

Concluzii

În rezolvarea unei probleme de programare liniară, partea cea mai importantă (şi dificilă) o constituie elaborarea modelului matematic. Astfel, pornind de la datele problemei, acestea trebuie analizate şi corelate pentru a exprima atât esenţa, cât şi conţinutul problemei descrise prin modelul matematic. Odată elaborat modelul matematic, soluţionarea problemei este uşor de realizat, ţinând seama de existenţa metodelor, algoritmilor şi programelor de calcul.

NOTE:

1 Ion Stoian, *Cercetarea operaţională cu aplicaţii în domeniul militar*, Editura Academiei de Înalte Studii Militare, Bucureşti, 2000, p. 13.

2 *Ibidem*, pp. 23-28.

BIBLIOGRAFIE

Ilie Gh., *Conducerea proceselor economice*, Editura AISTEDA, Bucureşti, 2002.

Ilie Gh., Stoian I., Alexandrescu G., *Modelarea sistemelor şi proceselor*, Editura UNAp „Carol I”, Bucureşti, 2005.

Ionescu Gh., Cazan E., Negruţă A.L., *Modelarea şi optimizarea deciziilor manageriale*, Cluj-Napoca, Editura Dacia, 1999.

Naianu B.P., Bălăşescu I., *Cercetarea operaţională – instrument al managementului*, Editura AISTEDA, 2000.

Stoian Ion, *Cercetarea operaţională cu aplicaţii în domeniul militar*, Editura Academiei de Înalte Studii Militare, Bucureşti, 2000.

Stratulat F., *Teoria sistemelor, Analiză asistată de calculator a sistemelor liniare*, Editura MatrixRom, Bucureşti, 2000.